Granica funkcji – ciągłość funkcji

Niech funkcja $f : X \to Y$ będzie określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0.

Definicja 10. Funkcję f nazywamy *ciągłą* w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica funkcji f w tym punkcie i jeżeli ta granica jest równa wartości funkcji f w punkcie x_0, tzn.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jeżeli funkcja f nie jest ciągła w punkcie x_0, to punkt ten nazywamy *punktem nieciągłości* funkcji.

Definicja 11. Funkcję f nazywamy *lewostronnie* (*prawostronnie*) *ciągłą* w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f ma w tym punkcie granicę lewostronną (prawostronną) równą swej wartości, tzn.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \text{(lub odpowiednio } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)\text{)}.$$

Uwaga. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy jest w tym punkcie lewostronnie i prawostronnie ciągła.

Mówimy, że funkcja jest ciągła w przedziale *X*, jeżeli jest określona i ciągła w każdym punkcie tego przedziału. Funkcję ciągłą w całej swojej dziedzinie nazywamy krótko *funkcją ciągłą*.

Podamy teraz kilka wybranych własności funkcji ciągłych.

Twierdzenie 4. Wszystkie funkcje elementarne są funkcjami ciągłymi.

Uwaga. Z powyższego twierdzenia wynika, że funkcja, której wzór przyjmuje różną postać w różnych przedziałach (przy czym, w każdym przedziale jest funkcją elementarną) może nie być ciągła jedynie w punktach, w których zmienia się zapis wzoru funkcji.

Twierdzenie 5. Suma, różnica, iloczyn i iloraz (w punktach, w których jest on określony) funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w tym punkcie.

Twierdzenie 6. Funkcja odwrotna do funkcji ciągłej i malejącej (rosnącej) jest ciągła i malejąca (rosnąca).

Twierdzenie 7. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Przykład 3. Zbadać ciągłość funkcji:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{dla } x<0 \\ \mathrm{e}^x-2 & \text{dla } x\ge 0 \end{cases}.$$

Rozwiązanie.

Wystarczy zbadać ciągłość tej funkcji w punkcie $x_0=0$. W pozostałych punktach ta funkcja jest ciągła (twierdzenie 4). Z definicji 10 wynika, że aby zbadać ciągłość funkcji w punkcie x_0 należy: 1) wyznaczyć wartość funkcji w tym punkcie, 2) obliczyć granicę funkcji w punkcie x_0 (w tym celu czasami trzeba obliczyć granice jednostronne), 3) sprawdzić, czy granica funkcji w punkcie x_0 jest równa wartości funkcji w tym punkcie. Otrzymamy:

1) $f(0)=\mathrm{e}^0-2=1-2=-1,$

2) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\mathrm{e}^x-2)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)=-1,$$

3) Stwierdzamy zatem, że ponieważ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, to funkcja jest ciągła w punkcie $x_0=0,$ a co za tym idzie – jest ciągła w całej swojej dziedzinie, czyli w zbiorze $\mathbb{R}$.

Przykład 4. Dla jakiej wartości p funkcja

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{dla } x\ne 1 \\ p & \text{dla } x=1 \end{cases},$$

jest ciągła w $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie. Badana funkcja może być nieciągła jedynie w punkcie $x_0=1$. Postępując analogicznie, jak w przykładzie 3 otrzymamy:

1) $f(1)=p,$

2) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3,$

3) Zatem funkcja będzie ciągła w punkcie $x_0=1$ (a jednocześnie w $\mathbb{R}$) dla $p=3$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zbadać ciągłość funkcji:

53. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x^2-2x} & \text{dla } x\neq -2 \\ 3 & \text{dla } x=-2 \end{cases}$, **54.** $f(x)=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{dla } x<0 \\ \cos 3x & \text{dla } x\geq 0 \end{cases}$,

55. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+|x|}{2x} & \text{dla } x\neq 0 \\ 2 & \text{dla } x=0 \end{cases}$, **56.** $f(x)=\begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x+1 & \text{dla } x\leq 0 \\ \log_2(x+2) & \text{dla } 0<x\leq 6 \\ x-3 & \text{dla } x>6 \end{cases}$.

Dla jakiej wartości p dana funkcja jest ciągła w punkcie x_0:

57. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{4x}{\sin 3x} & \text{dla } x\neq 0 \\ p & \text{dla } x=0 \end{cases}$, $x_0=0$,

58. $f(x)=\begin{cases} (x+p)^2 & \text{dla } x\leq 0 \\ x-1 & \text{dla } x>0 \end{cases}$, $x_0=0$,

59. $f(x)=\begin{cases} p^2-x & \text{dla } x\leq 1 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & \text{dla } x>1 \end{cases}$, $x_0=1$.

Opracowanie:
dr Igor Kierkosz
dr hab. Volodymyr Sushch